

Topics covered in this tutorial

- Discrete probability mass and cumulative distribution functions
- Transformations of discrete random variables
- Expected value, variance and standard deviation
- Moments, skewness and engineering applications

Complete all questions in this tutorial before the tutorial test that follows. The test normally starts between approximately 16:00 and 16:15.

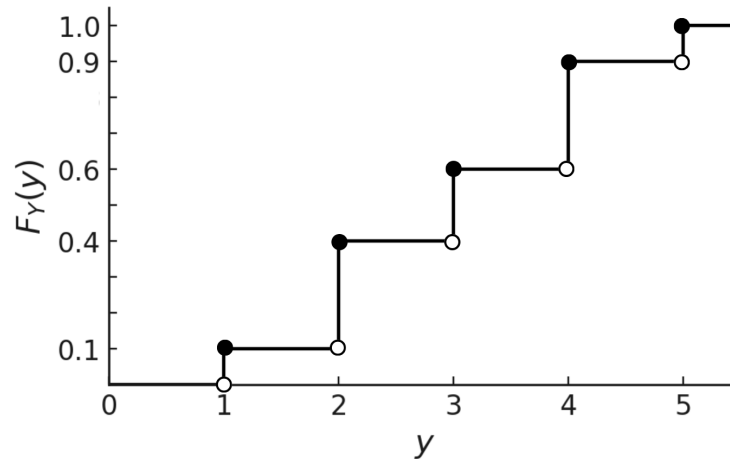
Onderwerpe wat in hierdie tutoriaal gedek word

- Diskrete waarskynlikheidsmassa- en kumulatiewe verdelingsfunksies
- Transformasies van diskrete toevalsveranderlikes
- Verwagte waarde, variansie en standaardafwyking
- Momente, skeefheid en ingenieurstoepassings

Voltooi al die vrae in hierdie tutoriaal voor die tutoriaaltoets wat daarop volg. Die toets begin gewoonlik tussen ongeveer 16:00 en 16:15.

-
- | | |
|---|---|
| 1. The random variable X describes the number of heads counted when a coin is flipped 4 times. | Die toevalsveranderlike X beskryf die aantal koppe wat getel word wanneer 'n muntstuk 4 keer opgegooi word. |
| (a) <u>Sketch</u> the sample space of this experiment. | <u>Skets</u> die steekproefruimte van hierdie eksperiment. |
| (b) Determine and <u>sketch</u> the probability mass function $P_X(x)$. | Bepaal en <u>skets</u> die waarskynlikheids massa funksie $P_X(x)$. |
| (c) Determine <u>and sketch</u> the cumulative distribution function $F_X(x)$ for this random variable. | Bepaal <u>en skets</u> die kumulatiewe verdelingfunksie $F_X(x)$ vir hierdie toevalsveranderlike. |
| (d) From your sketch, determine $P(0 < X \leq 2)$. | Gebruik jou skets om $P(0 < X \leq 2)$ te bepaal. |

2. Discrete random variable Y has the following CDF $F_Y(y)$:
Diskrete toevalsveranderlike Y het die volgende KVF $F_Y(y)$:



Use the CDF to find the following probabilities:

Gebruik die KVF om die volgende waarskynlikhede te vind:

- $P(Y < 1)$
 - $P(Y \leq 1)$
 - $P(Y \geq 2)$
 - $P(Y = 3)$
 - $P(Y > 3)$
 - $P_Y(y)$
3. A three-level sensor reports the discrete random variable X . The processed output is $Y = (X - 1)^2$. The PMF of X is given by:

'n Drievlaksensor lewer die diskrete toevalsveranderlike X . Die verwerkte uitset is $Y = (X - 1)^2$. Die WMF van X word gegee deur:

$$P_X(-1) = 0.2, \quad P_X(0) = 0.5, \quad P_X(2) = 0.3.$$

- Determine the PMF of Y . Explain why two values of X produce the same value of Y .
- Calculate $E[Y]$ and $\text{Var}[Y]$.
- An alarm variable is defined by $A = 1$ when $Y > 2$ and $A = 0$ otherwise. Determine the PMF of A .

Bepaal die WMF van Y . Verduidelik waarom twee waardes van X dieselfde waarde van Y lewer.

Bereken $E[Y]$ en $\text{Var}[Y]$.

'n Alarmveranderlike word gedefinieer deur $A = 1$ wanneer $Y > 2$ en $A = 0$ andersins. Bepaal die WMF van A .

4. In an archery competition, a player can score by hitting one of four concentric scoring zones on the target: Zone A (center), Zone B, Zone C, and Zone D (outermost).

Suppose hitting Zone D is twice as likely as hitting Zone C, which is twice as likely as hitting Zone B, which is twice as likely as hitting Zone A.

The probability that the player hits the target is 0.3. Let S be the number of points scored, where Zone D = 1 point, Zone C = 2 points, Zone B = 3 points, and Zone A = 4 points.

If the player misses the target completely, $S = 0$.

What is the PMF (Probability Mass Function) of S ?

5. Sarah must travel 2.4 km to her friend's house. If she feels energetic, she cycles at 12 km/h. If she feels normal, she jogs at 6 km/h. If she is tired, she walks at 4 km/h. The probabilities of feeling energetic and normal are 0.3 and 0.5, respectively.

Define a suitable random variable X , sketch the probability mass function $P_X(x)$ roughly, calculate the missing probability, and compute the expected time it takes Sarah to reach her friend's house.

6. X is a random variable that takes on one of the following values with equal probability:

$$S_X = \{12, 17, 20, 45, 50, 57\}$$

- (a) Determine the standard deviation of X and describe the meaning of the result.

- (b) Determine the coefficient of skewness of X and describe the meaning of the result.

In 'n boogskietkompetisie kan 'n speler punte aanteken deur een van vier konsentriese sones op die teiken te tref: Sone A (middel), Sone B, Sone C en Sone D (buite).

Veronderstel dat Sone D twee keer so waarskynlik is as Sone C, wat twee keer so waarskynlik is as Sone B, wat twee keer so waarskynlik is as Sone A.

Die waarskynlikheid dat die speler die teiken tref is 0.3. Laat S die aantal punte wees wat aangeteken word, waar Sone D = 1 punt, Sone C = 2 punte, Sone B = 3 punte en Sone A = 4 punte.

As die speler die teiken heeltemal mis, dan is $S = 0$.

Wat is die WMF (Waarskynlikheidsmassafunksie) van S ?

Sarah moet 2.4 km na haar vriendin se huis toe afê. As sy energiek voel, fiets sy teen 12 km/h. As sy normaal voel, draf sy teen 6 km/h. As sy moeg voel, loop sy teen 4 km/h. Die waarskynlikhede dat sy energiek en normaal voel is onderskeidelik 0.3 en 0.5.

Definieer 'n toepaslike toevalsveranderlike X , skets 'n rowwe grafiek van die waarskynlikheidsmassafunksie $P_X(x)$, bereken die ontbrekende waarskynlikheid, en bereken hoe lank dit gemiddeld vir Sarah neem om haar vriendin se huis te bereik.

X is 'n toevalsveranderlike wat een van die volgende waardes verteenwoordig met gelyke waarskynlikheid:

Bereken die standaardafwyking van X en beskryf wat dit beteken.

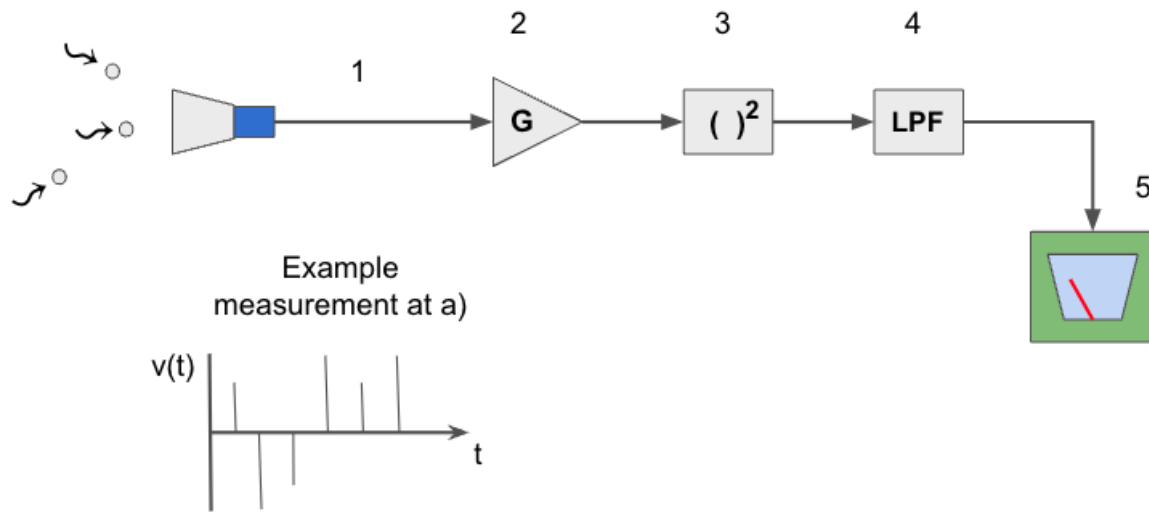
Bereken die koeffisient van skeefheid van X en beskryf wat dit beteken.

Optional bonus question for practice
Opsionele bonusvraag vir oefening

7. All people are constantly exposed to a certain rate of high energy particle interactions, due to natural processes. These process include radiation of high energy particles by the sun and exposure to trace amounts of radioactive gasses - such a radon which have diffused into the atmosphere. However, excessive exposure to high energy particle radiation beyond natural ambient radiation levels can cause permanent harm and death. The hazard factor of exposure is a function of both the number of particle interactions and also the mean energy of the particles interacted with. In general, higher interaction quantities and higher mean particle energies are more harmful. The system diagram for a device used to estimate the hazard level of localized high energy particle radiation is shown below. The subsystems of the device may be describes as follows:

Alle mense word voortdurend blootgestel aan 'n sekere koers van hoë-energie deeltjie interaksies, as gevolg van natuurlike pro- sessies. Hierdie proses sluit bestraling van hoë energie in deeltjies deur die son en blootstelling aan spoorhoeveelhede van radioaktiewe gasse - so 'n radon - wat versprei het die atmosfeer binne. Oormatige blootstelling aan hoë-energie deeltjie bestraling buite natuurlike omgewing bestralingsvlakke kan permanente skade veroorsaak en dood. Die gevaarfaktor van blootstelling is 'n funksie van beide die aantal deeltjie-interaksies en ook die gemiddelde energie van die deeltjies waarmee interaksie was. In algemeen, hoër interaksiehoeveelhede en hoër gemiddelde deeltjie-energieë is meer skadelik. Die stelsel dia- gram vir 'n toestel wat gebruik word om die gevaarvlak van te skat gelokaliseerde hoë-energie deeltjie bestraling word getoon as- laag. Die substelsels van die toestel kan beskryf word soos volg:

- A transducer is impacted by high energy particles in the environment. Each impact causes a voltage impulse at the output of the transducer. 'n Transducer word beïnvloed deur hoë-energie deeltjies in die omgewing. Elke impak veroorsaak 'n spanningsimpuls by die uitset van die omskakelaar.
- An amplifier that is intended to apply a gain, G , to the transducer output signal. 'n Versterker wat bedoel is om 'n versterking, G , toe te pas op die transducer-uitsetsein.
- A signal squaring circuit. If the input of this circuit is $v(t)$, the output is $v^2(t)$. 'n Seinkwadraatkring. As die inset van hierdie stroombaan $v(t)$ is, is die uitset $v^2(t)$.
- A low pass filter, which transforms the input signal of impulses to a smooth and slowly varying output. 'n Laagdeurlaatfilter, wat die insetsein van impulse transformeer na 'n gladde en stadig wisselende uitset.
- A voltmeter, which measures the output of the low pass filter, informs the instrument operator as to the level of hazard of the environment. 'n Voltmeter, wat die uitset van die laagdeurlaatfilter meet, lig die instrumentoperateur in oor die vlak van gevaar van die omgewing.



The instrument is deployed to assess the hazard level of a recent accidental leakage of chemical X. There are three types of high energy particle emitted by the chemical X, each producing a specific voltage magnitude when impacting the detector transducer. Particle type α , particle type β and particle type γ produce 0.01 V, 0.02 V and 0.03 V on collision with the transducer, respectively. The sign of the voltage induced is random and can be either positive or negative with equal probability. Assume that there are 10 000 high energy particle collisions with the transducer each second, and that the mean number of α , β and γ particle collisions per second is 2000, 5000 and 3000, respectively.

Die instrument word ontplooi om die gevaarvlak van 'n onlangse toevallige lekkasie van chemikalie X te bepaal. Daar is drie tipes hoë-energie-deeltjies wat deur die chemikalie X vrygestel word, wat elkeen 'n spesifieke spanningsgrootte produseer wanneer dit die detektor-omskakelaar beïnvloed. Partikeltipe α , partikeltipe β en partikeltipe γ produseer onderskeidelik 0.01 V, 0.02 V en 0.03 V by botsing met die transducer. Die teken van die spanning wat geïnduseer word, is ewekansig en kan met gelyke waarskynlikheid of positief of negatief wees. Aanvaar dat daar elke sekonde 10 000 hoë-energie deeltjiesbotsings met die transducer is, en dat die gemiddelde aantal α , β en γ deeltjiesbotsings per sekonde onderskeidelik 2000, 5000 en 3000 is.

- Let the voltage induced by a particle collision at the detector be a random variable, V . Sketch the probability mass function, $P_V(v)$, and cumulative distribution function, $F_V(v)$.
- Determine the mean and the variance of the voltage at the output of the transducer.
- The variance of the zero mean voltage signal is proportional to the average energy of the particle collisions measured. The signal at the transducer output is too weak to be immediately useful and must be amplified. If it is intended to amplify the voltage signal by a factor of 100, how would this impact its variance?

Laat die spanning geïnduseer deur 'n deeltjiesbotsing by die detektor 'n ewekansige veranderlike wees, V . Skets die waarskynlikheidsmassafunksie, $P_V(v)$, en kumulatiewe verspreidingsfunksie, $F_V(v)$.

Bepaal die gemiddelde en die variansie van die spanning by die uitset van die omskakelaar.

Die variansie van die nul-gemiddelde spanningsein is eweredig aan die gemiddelde energie van die deeltjiesbotsings wat gemeet is. Die sein by die transducer-uitset is te swak om onmiddellik bruikbaar te wees en moet versterk word. As dit bedoel is om die spanningsein met 'n faktor van 100 te versterk, hoe sal dit die variansie daarvan beïnvloed?

- (d) Assume that the amplifier used in the instrument is not ideal, that is, for an input voltage of $v(t)$ the output can be defined as $y(t) = 0.1 + 100v(t)$ Volts. Sketch the probability mass function of the random variable at the output of the signal squaring circuit.
- Aanvaar dat die versterker wat in die instrument gebruik word nie ideaal is nie, dit wil sê, vir 'n insetspanning van $v(t)$ kan die uitset gedefinieer word as $y(t) = 0.1 + 100v(t)$ Volts. Skets die waarskynlikheidsmassafunksie van die ewekansige veranderlike by die uitset van die seinkwadraterkring.
- (e) Assume the low-pass filter (LPF) behaves as an ideal averaging device — over time, it smooths its input into a steady output equal to the statistical mean of its input (this can be modelled as the expected value of the random variable coming in the input). Based on the input signal resulting from the non-ideal amplifier in part (d), determine the voltage that the voltmeter will register.
- Aanvaar dat die lae-deurlaatfilter (LPF) optree as 'n ideale gemiddeldnemer — dit versag met verloop van tyd sy inset tot 'n konstante uitset wat gelyk is aan die statistiese gemiddelde van die inset (dit kan gemodelleer word as die verwagte waarde van die toevalsveranderlike wat by die inset inkom). Gebruik die insetsein wat ontstaan het uit die nie-ideale versterker in deel (d) om die spanning te bepaal wat die voltmeter sal aandui.
- (f) The voltage calculated in e) is used to indicate the measurement of the average energy of particle collisions with the transducer to the operator, how does it compare to your answer for c)? What is the cause of the discrepancy and why might this be significant?
- Die spanning bereken in e) word gebruik om die meting van die gemiddelde energie van deeltjiesbotsings met die omskakelaar aan die operateur aan te dui, hoe vergelyk dit met jou antwoord vir c)? Wat is die oorsaak van die verskil en hoekom kan dit beduidend wees?