

Topics covered in this tutorial

- Conditional probability and the Monty Hall problem
- Counting, combinations and ordered selections
- The law of total probability and Bayes' theorem
- Diagnostic-test errors and discrete PMFs obtained from observations

Complete all questions in this tutorial before the tutorial test that follows. The test normally starts between approximately 16:00 and 16:15.

Onderwerpe wat in hierdie tutoriaal gedek word

- Voorwaardelike waarskynlikheid en die Monty Hall-probleem
- Telmetodes, kombinasies en geordende keuses
- Die wet van totale waarskynlikheid en Bayes se stelling
- Diagnostiese toetsfoute en diskrete WMe wat uit waarnemings verkry word

Voltooi al die vrae in hierdie tutoriaal voor die tutoriaaltoets wat daarop volg. Die toets begin gewoonlik tussen ongeveer 16:00 en 16:15.

-
- | | |
|---|---|
| <p>1. A bag contains 4 yellow balls, 7 black balls and 5 white balls. You randomly draw 2 balls one after the other without replacement.</p> <p>(a) What is the probability that the second ball drawn is black if we have no information about the first ball?</p> <p>(b) What is the probability that the first ball was yellow given that the second ball is black?</p> | <p>'n Sak bevat 4 geel balle, 7 swart balle en 5 wit balle. Jy trek willekeurig 2 balle agtermekaar sonder terugplasing.</p> <p>Wat is die waarskynlikheid dat die tweede bal swart is indien ons geen inligting oor die eerste bal het nie?</p> <p>Wat is die waarskynlikheid dat die eerste bal geel was, gegee dat die tweede bal swart is?</p> |
| <p>2. Monty Hall hosts a TV game-show where a participant must choose between one of three doors. Behind one of the doors there is an expensive car, the other two each conceal somewhat smelly goats. After the participant has indicated his choice, the game-show host opens one of the other doors to reveal a goat. The host will never open either the door chosen by the participant or the door with the car. Except for this, he has no preference for any specific door. The participant may now reconsider his choice. Under the assumption that he actually wants to win the car, should he stick with his original choice or should he change to the other remaining door?</p> | <p>Monty Hall bied 'n TV speletjie aan waar 'n deelnemer een van drie deure moet kies. Agter een van die drie is daar 'n luukse motor; die ander twee versteek ietwat stinkerige bokke. Nadat die deelnemer sy keuse aangewys het, wys die aanbieder 'n bok agter 'n ander deur. Die aanbieder sal nooit die deur van die deelnemer se aanvanklike keuse, of die deur met die motor daaragter oopmaak nie. Behalwe hiervoor, het hy nie enige voorkeur vir 'n bepaalde deur nie. Die deelnemer kry nou kans om sy aanvanklike keuse te heroorweeg. Met die aanname dat hy wel die motor wil wen, moet hy by sy oorspronklike keuse bly, of moet hy die oorblywende deur kies?</p> |
| <p>3. Four tiles are drawn at random from a bag containing 60 uniquely numbered tiles (numbered 1 to 60).</p> <p>(a) Calculate the probability that you can correctly guess all four numbers that were drawn.</p> <p>(b) Again you guess four numbers. What is the probability that you correctly guess exactly two of the four numbers that were drawn?</p> | <p>Vier teëls word willekeurig getrek uit 'n sak met 60 uniek genummerde teëls (genommer van 1 tot 60).</p> <p>Bereken die waarskynlikheid dat jy al vier getalle wat getrek is, korrek kan raai.</p> <p>Jy raai weer vier getalle. Wat is die waarskynlikheid dat jy presies twee van die vier getalle wat getrek is, korrek raai?</p> |
-

4. Eight technicians must fill three different field-test jobs: **team leader**, **instrument operator**, and **data recorder**. The jobs have different responsibilities, so it matters which technician performs which job: swapping two technicians gives a different assignment. No technician may fill more than one job.

(a) How many ordered assignments are possible? Hoeveel geordende toewysings is moontlik?

(b) From the five remaining technicians, appoint a **first reserve** and a **second reserve**. These are also ordered: the first is called before the second, so swapping them gives a different roster. How many ordered complete rosters are possible for all five positions? Wys uit die vyf oorblywende tegnici 'n **eerste reserwe** en 'n **tweede reserwe** aan. Hulle is ook georden: die eerste word voor die tweede opgeroep, dus gee omruiling 'n ander rooster. Hoeveel geordende volledige roosters is vir al vyf posisies moontlik?
5. An automated end-of-line inspection system screens sensor modules for a manufacturing defect. A positive result means that the system flags a module as defective; a negative result means that the module passes the inspection. Let R_+ denote the event that a module receives a positive result, and let R_- denote the event that it receives a negative result. The manufacturer wants to estimate the actual defect rate. This week, 1200 modules were inspected: 900 received negative results and 300 received positive results. A recent validation study reported two important findings:

'n Outomatiese eindlyn-inspeksiestelsel toets sensor-modules vir 'n vervaardigingsfout. 'n Positiewe uitslag beteken dat die stelsel 'n module as foutief merk; 'n negatiewe uitslag beteken dat die module die inspeksie slaag. Laat R_+ die gebeurtenis aandui dat 'n module 'n positiewe uitslag ontvang, en laat R_- die gebeurtenis aandui dat dit 'n negatiewe uitslag ontvang. Die vervaardiger wil die werklike foutkoers skat. Hierdie week is 1200 modules geïnspekteer: 900 het negatiewe uitslae en 300 het positiewe uitslae ontvang. 'n Onlangse validasiestudie het twee belangrike bevindings gerapporteer:

 - 8% of all inspection results are incorrect (either false positives or false negatives). • 8% van alle inspeksie-uitslae is verkeerd (hetsy vals positief of vals negatief).
 - Among the modules with a positive result, 15% are actually non-defective (their positive result is false). • Onder die modules met 'n positiewe uitslag is 15% in werklikheid nie foutief nie (hulle positiewe uitslag is vals).

(a) Based on the validation study and the 1200 inspection results, what is the probability that a module with a negative result is actually defective? Use the law of total probability. Gebaseer op die validasiestudie en die 1200 inspeksie-uitslae, wat is die waarskynlikheid dat 'n module met 'n negatiewe uitslag in werklikheid foutief is? Gebruik die wet van totale waarskynlikheid.

(b) Will there be more false-positive results or false-negative results in the inspected group? Sal daar meer vals positiewe uitslae of vals negatiewe uitslae in die geïnspekteerde groep wees?

(c) What is the probability that a randomly selected module is actually non-defective? Wat is die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose module in werklikheid nie foutief is nie?

(d) How many of the 1200 modules would you expect to be actually defective? Hoeveel van die 1200 modules sou jy verwag in werklikheid foutief is?

(e) If an inspection result is incorrect, what is the probability that it is a negative result? Use Bayes' theorem to compute the answer. As 'n inspeksie-uitslag verkeerd is, wat is die waarskynlikheid dat dit 'n negatiewe uitslag is? Gebruik Bayes se stelling om die antwoord te bereken.

6. A network-monitoring system analyses data sessions. A security intrusion occurs in 2% of sessions. If an intrusion is present, the system raises an alert 92% of the time. If no intrusion is present, the system still raises a false alert 7% of the time. A randomly selected session raises an alert. What is the probability that the session actually contains an intrusion?
- ’n Netwerkmoneeringsstelsel ontleed datasessies. ’n Sekuriteitsindringing kom in 2% van sessies voor. Indien ’n indringing teenwoordig is, gee die stelsel 92% van die tyd ’n waarskuwing. Indien geen indringing teenwoordig is nie, gee die stelsel steeds 7% van die tyd ’n vals waarskuwing. ’n Ewekansig gekose sessie lewer ’n waarskuwing. Wat is die waarskynlikheid dat die sessie werklik ’n indringing bevat?
7. Temperature in a given city varies uniformly during the year from -21°C to 49°C . A house in the city has a thermostat that assumes one of four positions:
- Temperatuur in ’n gegewe stad wissel eenvormig gedurende die jaar van -21°C tot 49°C . ’n Huis in die stad het ’n termostaat wat een van vier posisies aanneem:
- 1 represents “too cold” for temperatures below 18.3°C ,
 - 2 represents “ideal temperature” for temperatures between 18.3°C and 21.7°C ,
 - 3 represents “moderately warm” for temperatures between 21.7°C and 30°C ,
 - 4 represents “too hot” for temperatures above 30°C .
- 1: “te koud” vir temperature onder 18.3°C ,
 - 2: “ideale temperatuur” vir temperature tussen 18.3°C en 21.7°C ,
 - 3: “matig warm” vir temperature tussen 21.7°C en 30°C ,
 - 4: “te warm” vir temperature bo 30°C .
- (a) Draw a sample space for this problem showing the mapping necessary to define a random variable: $X = \text{“thermostat setting”}$.
- Teken ’n monsterruimte vir die probleem wat die nodige kartering aandui om die lukrake veranderlike te definieer: $X = \text{“termostaat instelling”}$.
- (b) Determine the probability mass function (PMF) of X and sketch its graph.
- Bepaal die waarskynlikheidsmassafunksie (PMF) van X en teken die grafiek daarvan.
- (c) Calculate $P(1 < X \leq 3)$.
- Bereken $P(1 < X \leq 3)$.