

Topics covered in this tutorial

- Set operations, sample spaces and events
- Venn diagrams, probability axioms and De Morgan's laws
- Complements and repeated trials
- Conditional probability and independence

Complete all questions in this tutorial before the tutorial test that follows. The test normally starts between approximately 16:00 and 16:15.

Onderwerpe wat in hierdie tutoriaal gedek word

- Versamelingsbewerkings, steekproefruimtes en gebeurtenisse
- Venn-diagramme, waarskynlikheidsaksiomas en De Morgan se wette
- Komplemente en herhaalde proewe
- Voorwaardelike waarskynlikheid en onafhanklikheid

Voltooi al die vrae in hierdie tutoriaal voor die tutoriaaltoets wat daarop volg. Die toets begin gewoonlik tussen ongeveer 16:00 en 16:15.

1. An adaptive receiver scans one of six communication channels, each with equal probability. Let A be the high-data-rate channels, B the channels whose primary route is currently blocked, and C the channels with an available backup route. The engineer combines these events to assess speed and resilience: traffic can be carried immediately whenever the primary route is not blocked ($\bar{B}$) or a backup route is available (C).

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3\}$$

$$B = \{2, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 5\}$$

- (a) Which channels are both high-data-rate and backed up? Determine $A \cap C$.
- (b) What is the probability that the scan selects a channel offering a performance or resilience benefit—that is, a high-data-rate channel or one with a backup route? Determine $P(A \cup C)$.
- (c) What is the probability that traffic can be carried immediately? Use the operating rule above and determine $P(\bar{B} \cup C)$.
- (d) Which channels have an unblocked primary route but no backup route? Determine $\bar{B} \cap \bar{C}$ and state briefly why these channels are less resilient.

'n Aanpasbare ontvanger skandeer een van ses kommunikasiekanale, elk met dieselfde waarskynlikheid. Laat A die kanale met 'n hoë datatempo wees, B die kanale waarvan die primêre roete tans geblokkeer is, en C die kanale met 'n beskikbare rugsteunroete. Die ingenieur kombineer hierdie gebeurtenisse om spoed en robuustheid te beoordeel: verkeer kan onmiddellik oorgedra word wanneer die primêre roete nie geblokkeer is nie ($\bar{B}$) of 'n rugsteunroete beskikbaar is (C).

Watter kanale het sowel 'n hoë datatempo as 'n rugsteunroete? Bepaal $A \cap C$.

Wat is die waarskynlikheid dat die skandering 'n kanaal met 'n prestasie- of robuustheidsvoordeel kies—dit wil sê, 'n kanaal met 'n hoë datatempo of een met 'n rugsteunroete? Bepaal $P(A \cup C)$.

Wat is die waarskynlikheid dat verkeer onmiddellik oorgedra kan word? Gebruik die bedryfsreël hierbo en bepaal $P(\bar{B} \cup C)$.

Watter kanale het 'n ongeblokkeerde primêre roete maar geen rugsteunroete nie? Bepaal $\bar{B} \cap \bar{C}$ en verduidelik kortliks waarom hierdie kanale minder robuust is.

2. Construct a diagram of the sample space for the following experiment-observation combinations. Indicate the probability of each outcome in the sample space:
 - (a) A spinner with four equally spaced colour sections (red, blue, green, yellow) is spun, and the observed outcome is the color landed on.

Konstrueer 'n diagram van die steekproefruimte vir die volgende eksperiment-waarnemingskombinasies. Aandui die waarskynlikheid van elke uitkoms in die steekproefruimte:

'n Draaier met vier ewe-groot kleurseksies (rooi, blou, groen, geel) word gedraai, en die waargenome uitkoms is die kleur waarop dit land.
 - (b) Two cards are drawn one after the other, without replacement, from a pack containing three cards: the aces of hearts (H), diamonds (D), and clubs (C). The observed outcome is the ordered pair of card types.

Twee kaarte word een ná die ander getrek sonder terugplasing uit 'n pak wat drie kaarte bevat: die ase van hart (H), diamant (D) en klawer (C). Die waargenome uitkoms is die geordende paar kaart-tipes.
 - (c) Three fair coins are tossed, and the number of tails observed in the sequence is recorded.

Twee muntstukke word gegooi, en die aantal sterte wat in die volgorde voorkom, word aangeteken.
3. Using De Morgan's Law for two events, namely $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, prove that De Morgan's Law can be extended to three events A , B and C as follows:

Met die gebruik van De Morgan se Wet vir twee gebeurtenisse, naamlik $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, bewys dat De Morgan se Wet vir drie gebeurtenisse as volg uitgebrei kan word:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

state which set laws you are applying. en **noem** watter versamelingswette u toepas.
4. A jar contains 15 buttons numbered 1 to 15. Buttons 1 to 5 are blue and buttons 6 to 15 are yellow. You remove one button from the jar.

'n Fles bevat 15 knope wat 1 to 15 genummer is. Knope 1 to 5 is blou en knope 6 to 15 is geel. Jy haal een knoop uit die fles uit.

 - (a) Draw a Venn-diagram of the sample space showing two events: B , drawing a blue button, and Y , drawing a yellow button.

Teken 'n Venn-diagram van die steekproefruimte met twee gebeurtenisse: B , dat 'n blou knoop getrek word, en Y , dat 'n geel knoop getrek word.
 - (b) What is the probability that you removed a blue button?

Wat is die waarskynlikheid dat jy 'n blou knoop uithaal?
 - (c) What is the probability that you removed an odd-numbered button that is yellow?

Wat is die waarskynlikheid dat jy 'n onewegenommerde knoop uithaal wat geel is?
 - (d) Assume that the button you removed was blue. You remove another button from the jar. What is the probability that this one is also blue?

Aanvaar dat die knoop wat jy uitgehaal het was blou. Jy haal nog 'n knoop uit die fles uit. Wat is die waarskynlikheid dat hierdie knoop ook blou is?

5. A game is played with two players and two dice. If the biggest number rolled on either die is one, two or three player 1 wins. If the biggest number rolled is a four, five or six, player 2 wins.

Twee spelers speel die volgende spel met twee dobbelstene. As die grootste getal van die twee 'n een, twee of drie is, wen speler 1. As die grootste getal egter vier, vyf of ses is, wen speler twee.

 - (a) Without doing any calculations, do you think that both players have an equal chance of winning? Explain why.

Sonder om enige berekeninge aan te pak, dink jy dat altwee spelers 'n gelyke kans het om te wen? Verduidelik hoekom.
 - (b) Draw a Venn diagram describing the sample space of this game. Remember that the combination of the two numbers from both dice represents a single outcome.

Teken 'n Venn diagram wat die steekproefruimte van hierdie spel beskryf. Onthou dat die kombinasie van die twee getalle op die twee dobbelstene 'n enkele uitkoms verteenwoordig.
 - (c) Are the elementary outcomes in the sample space equiprobable?

Is al die elementêre uitkomstes in die steekproefruimte ewe waarskynlik?
 - (d) From this, determine the probability that player 2 will win the game.

Bepaal hieruit wat die waarskynlikheid is dat speler 2 die spel sal wen.

6. French writer and amateur mathematician Antoine Gamboud (1607-84) liked to gamble by betting on a game of dice after calculating the odds. In a first game, a single die is thrown four times, and bets are placed on seeing at least one six. Gamboud calculated that he would win, and win he did. This financial success emboldened him to a second game, in which a pair of dice is thrown twenty-four times, and bets are placed on seeing at least one double-six. Gamboud again calculated that he would win, but he lost. Gamboud turned to Blaise Pascal, who then corresponded with Pierre de Fermat in a series of letters spanning several months in 1654, before the solution was found. You, however, have no more than two hours...

(Tip: If you repeat an experiment that has n distinguishable outcomes k times and each experiment is independent from one another, then there are n^k possible outcomes.)

Franse skrywer en amateur wiskundige Antoine Gamboud (1607-84) wou graag dobbel deur 'n weddenskap op 'n dobbelsteen-spel aan te gaan, nadat hy die kans bereken het. In 'n eerste spel word 'n enkele dobbelsteen vier keer gegooi, en 'n weddenskap word aangegaan om minstens een ses te sien. Gamboud het bereken dat hy sou wen en hy het wel gewen. Dié finansiële sukses het hom tot 'n tweede spel aangemoedig, waarin twee dobbelstene vier-en-twintig keer gegooi word en 'n weddenskap word aangegaan om minstens een ses-ses kombinasie te sien. Gamboud het weer bereken dat hy sou wen, maar dié keer het hy verloor. Gamboud het na Blaise Pascal gedraai, wat dit met Pierre de Fermat bespreek het in 'n reeks briewe wat oor 'n tydperk van 'n paar maande in 1654 geskryf is, voordat die oplossing gevind kon word. U het egter nie meer as twee uur nie...

(Wenk: As jy 'n eksperiment met n onderskeibare uitkomstes herhaal k keer en elke eksperiment is onafhanklik van mekaar, dan is daar n^k moontlike uitkomstes.)

 - (a) Calculate the probability of winning the first game (seeing at least one six among four throws of a single die).

Bereken die waarskynlikheid om die eerste spel te wen (om minstens een ses te sien wanneer 'n enkel dobbelsteen vier keer gegooi word).
 - (b) Calculate the probability of winning the second game (seeing at least one double-six among 24 throws of a pair of dice).

Bereken die waarskynlikheid om die tweede spel te wen (om minstens een ses-ses kombinasie te sien wanneer twee dobbelstene vier-en-twintig keer gegooi word).
 - (c) How many times do the dice need to be thrown in the first game such that we are 95% certain we will win?

Hoeveel keer moet die dobbelstene gegooi word sodat ons 95% seker is dat ons die eerste spel gaan wen?

7. Let A be an event in sample space S and B be a subset of A . Using what you know of set theory and the axioms of probability, prove that

(a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(B)$

(b) $P(B) \leq P(A)$

8. At a factory's quality control station, three consecutive products are inspected. Each product is either faulty (f) or good (g). Consider the sequence of three products as a single outcome. For example, a sequence with two good products and one faulty product is an observation ggf . The outcomes fff and ggg each have a probability of 0.05, while each of the other outcomes have a probability of 0.15. Let N_G be the number of good products in a single observation. Determine:

(a) $P(N_G = 2)$

(b) $P(N_G \geq 1)$

(c) $P(\{gfg\} | N_G = 2)$

(d) $P(N_G = 2 | N_G \geq 1)$

(e) $P(N_G \geq 1 | N_G = 2)$

- (f) Are the events $\{fff\}$ and $N_G \geq 1$ independent?

Laat A 'n gebeurtenis in steekproefruimte S en B 'n subversameling van A wees. Gebruik wat jy weet van versamelingsteorie en die aksiomas van waarskynlikheid en bewys dat

By 'n fabriek se kwaliteitskontrole-stasie word drie opeenvolgende produkte ondersoek. Elke produk is óf foutief (f) óf goed (g). Veronderstel drie van hierdie opeenvolgende produkte is een uitkoms. Byvoorbeeld, twee goeie produkte en een foutiewe produk gee die uitkoms ggf . Die uitkomstes ggg en fff het elk 'n waarskynlikheid van 0.05, terwyl al die ander uitkomstes 'n waarskynlikheid van 0.15 het. Laat N_G die hoeveelheid goeie produkte in een uitkoms wees. Bepaal:

Is die gebeurtenisse $\{fff\}$ en $N_G \geq 1$ onafhanklik?