

Topics covered in this tutorial

- Sample functions and process classification
- Ensemble/time averages, moments, autocovariance and autocorrelation
- Poisson counts, independent increments and memorylessness
- Superposition and thinning of Poisson processes
- Brownian increments, joint densities and covariance
- Independent sequences with seasonal means

Complete all questions (1–5) before the tutorial test that follows. The test normally starts between approximately 16:00 and 16:15.

Onderwerpe wat in hierdie tutoriaal gedek word

- Steekproeffunksies en prosesklassifikasie
- Ensemble-/tydgemiddeldes, momente, outokovariansie en outokorrelasie
- Poisson-tellings, onafhanklike inkremente en geheueloosheid
- Superposisie en uitdunning van Poisson-prosesse
- Brownse inkremente, gesamentlike digthede en kovariansie
- Onafhanklike reekse met seisoenale gemiddeldes

Voltooi al die vrae (1–5) voor die tutoriaaltoets wat daarop volg. Die toets begin gewoonlik tussen ongeveer 16:00 en 16:15.

1. Consider $X(t) = e^{-t} + A$, $t \geq 0$, where A is uniform on $[1, 3]$. One value of A is drawn for the entire sample function; it is not redrawn at each time.

(a) Is this a discrete-time or continuous-time process, and is it discrete-valued or continuous-valued?

Sketch the sample functions for $A = 3/2$ and $A = 5/2$. What remains random when t is fixed?

(b) For a fixed t , find the PDF of $X(t)$, the ensemble mean $\mu_X(t)$, $E[X(t)^2]$, and the variance.

(c) Find $C_X(t, \tau)$ and $R_X(t, \tau)$ for $t, t + \tau \geq 0$. Are samples at two distinct times independent? Explain.

(d) For the sample function with $A = a$, calculate the time average $\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ and its limit as $T \rightarrow \infty$. Explain how this differs from an ensemble average.

2. Customers arrive at a service centre according to a Poisson process, with one arrival every five minutes on average. It opens with an empty waiting area at 09:00. Service starts with an introductory demonstration for the first group of four, so it begins immediately when the fourth customer arrives. Nobody leaves before then. Let $N(t)$ count all arrivals in the first t minutes after opening, including after service begins.

(a) Determine the expected time at which service begins.

(b) Calculate the probability that service has not begun within the first hour.

(c) Using independent increments, find the joint PMF of $N(10)$ and $N(20)$. Hence calculate the joint probability $P(N(10) = 1, N(20) = 3)$. Explain why $N(10)$ and $N(20)$ themselves are not independent.

(d) Let T_1 be the time of the first arrival. Given no arrival in the first four minutes, calculate $P(T_1 > 10 | T_1 > 4)$. Briefly interpret memorylessness here.

1. Beskou $X(t) = e^{-t} + A$, $t \geq 0$, waar A uniform op $[1, 3]$ is. Een waarde van A word vir die hele steekproeffunksie getrek; dit word nie op elke tydstip opnuut getrek nie.

(a) Is hierdie proses diskreettydig of kontinu-tydig, en is dit diskreetwaardig of kontinu-waardig? Skets die steekproeffunksies vir $A = 3/2$ en $A = 5/2$. Wat bly ewekansig wanneer t vasgestel word?

(b) Vir 'n vaste t , vind die WDF van $X(t)$, die ensemblagemiddelde $\mu_X(t)$, $E[X(t)^2]$, en die variansie.

(c) Vind $C_X(t, \tau)$ en $R_X(t, \tau)$ vir $t, t + \tau \geq 0$. Is proseswaardes op twee verskillende tydstippe onafhanklik? Verduidelik.

(d) Vir die steekproeffunksie met $A = a$, bereken die tydgemiddelde $\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ en die limiet daarvan as $T \rightarrow \infty$. Verduidelik hoe dit van 'n ensemblagemiddelde verskil.

2. Kliënte arriveer by 'n diensentrum volgens 'n Poisson-proses, met gemiddeld een aankoms elke vyf minute. Dit maak om 09:00 met 'n leë wagarea oop. Diens begin met 'n inleidende demonstrasie vir die eerste groep van vier, dus onmiddellik wanneer die vierde kliënt arriveer. Niemand vertrek voor dan nie. Laat $N(t)$ alle aankomste in die eerste t minute na oopmaak tel, ook nadat diens begin het.

(a) Bepaal die verwagte tyd waarop diens begin.

(b) Bereken die waarskynlikheid dat diens nie binne die eerste uur begin het nie.

(c) Vind die gesamentlike WMF van $N(10)$ en $N(20)$ deur onafhanklike inkremente te gebruik. Bereken daaruit die gesamentlike waarskynlikheid $P(N(10) = 1, N(20) = 3)$. Verduidelik waarom $N(10)$ en $N(20)$ self nie onafhanklik is nie.

(d) Laat T_1 die tyd van die eerste aankoms wees. Gegewe geen aankoms in die eerste vier minute nie, bereken $P(T_1 > 10 | T_1 > 4)$. Vertolk kortliks geheueloosheid hier.

3. Two sensors send notifications according to independent Poisson processes: sensor A at 2 per minute and sensor B at 1 per minute. A monitoring system combines their notifications. Independently of source and of all other notifications, each notification is labelled priority with probability $1/4$, and routine otherwise.

- (a) Give the rate of the combined process $N(t)$ and calculate $P(N(2) = 4)$.
- (b) Let $N_P(t)$ and $N_R(t)$ count priority and routine notifications. Give their rates, state whether these processes are independent, and calculate the joint probability $P(N_P(2) = 1, N_R(2) = 3)$.
- (c) What is the probability that the next notification in the combined process comes from sensor A?

4. The temperature change from the start of a reactor's production shift is modelled by Brownian motion $W(t)$, with $W(0) = 0$ and parameter α . Time is in hours, temperature change in degrees Celsius. The standard deviation of the change over a twelve-hour shift is $3/5$ degrees Celsius.

- (a) Find α and give the distribution family, mean and standard deviation of $W(5) - W(2)$.
- (b) Write the joint PDF $f_{W(2), W(5)}(w_2, w_5)$ as a product of two Gaussian densities. Use the independent variables $W(2)$ and $W(5) - W(2)$.
- (c) Using independent increments, show that $\text{Cov}[W(s), W(u)] = \alpha \min(s, u)$ for $s, u \geq 0$. Use this result to give $C_W(t, \tau)$ and $R_W(t, \tau)$ for $t, t + \tau \geq 0$. Hence find $\text{Cov}[W(2), W(5)]$ and state whether $W(2)$ and $W(5)$ are independent.

5. A simple model of the daily noontime temperature at Cape Town International Airport is

$$C_n = 16 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{365} \right) \right] + 4X_n, \quad n = 1, \dots, 365,$$

where X_n are iid standard Gaussian random variables with mean zero and standard deviation one.

- (a) Find $\mu_C[n]$, $\text{Var}[C_n]$ and the second moment $E[C_n^2]$.
- (b) Find $C_C[m, k]$ and $R_C[m, k]$ for valid indices $1 \leq m, m + k \leq 365$. Explain why zero autocovariance at nonzero lag need not mean zero autocorrelation.

3. Twee sensors stuur kennisgewings volgens onafhanklike Poisson-prosesse: sensor A teen 2 per minuut en sensor B teen 1 per minuut. 'n Monitoringstelsel voeg hul kennisgewings saam. Onafhanklik van die bron en van alle ander kennisgewings word elke kennisgewing met waarskynlikheid $1/4$ as prioriteit gemerk, en andersins as gewoon.

- (a) Gee die tempo van die saamgevoegde proses $N(t)$ en bereken $P(N(2) = 4)$.
- (b) Laat $N_P(t)$ en $N_R(t)$ prioriteits- en gewone kennisgewings tel. Gee hul tempo's, stel of hierdie prosesse onafhanklik is, en bereken die gesamentlike waarskynlikheid $P(N_P(2) = 1, N_R(2) = 3)$.
- (c) Wat is die waarskynlikheid dat die volgende kennisgewing in die saamgevoegde proses van sensor A kom?

4. Die temperatuurverandering sedert die begin van 'n reaktor se produksieskof word deur Brownse beweging $W(t)$ met $W(0) = 0$ en parameter α gemodelleer. Tyd is in ure, temperatuurverandering in grade Celsius. Die standaardafwyking van die verandering oor 'n twaalfuur-skof is $3/5$ grade Celsius.

- (a) Vind α en gee die verdelingsfamilie, gemiddelde en standaardafwyking van $W(5) - W(2)$.
- (b) Skryf die gesamentlike WDF $f_{W(2), W(5)}(w_2, w_5)$ as 'n produk van twee Gaussiese digthede. Gebruik die onafhanklike veranderlikes $W(2)$ en $W(5) - W(2)$.
- (c) Toon met behulp van onafhanklike inkremente dat $\text{Cov}[W(s), W(u)] = \alpha \min(s, u)$ vir $s, u \geq 0$. Gebruik hierdie resultaat om $C_W(t, \tau)$ en $R_W(t, \tau)$ vir $t, t + \tau \geq 0$ te gee. Vind daaruit $\text{Cov}[W(2), W(5)]$ en stel of $W(2)$ en $W(5)$ onafhanklik is.

5. 'n Eenvoudige model van die daaglikse middagtemperatuur by Kaapstad Internasionale Lughawe is

waar X_n oiv standaard-Gaussiese toevalsveranderlikes met gemiddelde nul en standaardafwyking een is.

- (a) Vind $\mu_C[n]$, $\text{Var}[C_n]$ en die tweede moment $E[C_n^2]$.
- (b) Vind $C_C[m, k]$ en $R_C[m, k]$ vir geldige indekse $1 \leq m, m + k \leq 365$. Verduidelik waarom nul-outokovariansie by 'n nie-nul-lag nie noodwendig nul-outokorrelasie beteken nie.